Correction du baccalauréat S Centres étrangers

14 juin 2010

Exercice 1 — 4 points

Commun à tous les candidats

Question 1

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$, on considère les droites $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ de représentations paramétriques :

$$(\mathcal{D}_1)\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -1+2t\\ y &=& -3t\\ z &=& 1+t\end{array}\right. \quad (t\in\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad (\mathcal{D}_2)\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1-2t\\ y &=& 5-t\\ z &=& -2+t\end{array}\right. \quad (t\in\mathbb{R}).$$

Affirmation :

Les droites $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ sont orthogonales si et seulement si leurs vecteurs directeurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont orthogonaux :

$$\vec{u}_1\left|\begin{array}{l}2\\-3\\1\end{array}\right. \cdot \vec{u}_2\left|\begin{array}{l}-2\\-1\\1\end{array}\right. = 2\times -2+(-3)\times(-1)+1\times 1=0$$

Question 2

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$, on considère le point A de coordonnées $(2\,;\,-1\,;\,3)$ et la droite $(\mathcal{D})$ de représentation paramétrique :

$$(\mathcal{D})\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+4t\\ y &=& -2+2t\\ z &=& 3-2t\end{array}\right. \quad (t\in\mathbb{R}).$$

Affirmation :

Le plan $(\mathcal{P})$ contenant le point A et orthogonal à la droite $(\mathcal{D})$ a pour équation : $2x+y-z=0$, car un vecteur normal au plan est $\vec{u}\left|\begin{array}{l}2\\1\\-1\end{array}\right. \mathbin{/\!/} \vec{v}\left|\begin{array}{l}4\\2\\-2\end{array}\right.$ qui est un vecteur directeur à la droite $(\mathcal{D})$.

De plus, le point $A(2\,;\,-1\,;\,3)$ appartient au plan car ses coordonnées vérifient l'équation du plan $(\mathcal{P})$: $2\times 2+(-1)-3=0$.

Question 3

La durée de vie, exprimée en heures, d'un jeu électronique, est une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,0003$.

On rappelle que, pour tout $t \geqslant 0$, $p(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx$.

Affirmation :

La probabilité p pour que la durée de vie de ce jeu soit strictement supérieure à 2000 heures est **supérieure** à 0,5.

$$p = 1-p(X\leqslant 2000) = 1-\int_0^{2000} 0,0003e^{-0,0003x}\,dx = 1-\left[-e^{-0,0003x}\right]_0^{2000} = 1+e^{-0,6}-1 \simeq 0,549 \geqslant 0,5$$

Question 4

A et B sont deux évènements liés à une même épreuve aléatoire qui vérifient :

$$p(\mathrm{A}) = 0,4,\, p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = 0,7 \text{ et } p_{\overline{\mathrm{A}}}\left(\overline{\mathrm{B}}\right) = 0,1.$$

Affirmation :

La probabilité de l'évènement A sachant que l'évènement B est réalisé est égale à $\dfrac{14}{41}$. En effet :

$$p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) \times p(\mathrm{A}) = 0,4\times 0,7 = 0,28 \text{ et } p\left(\overline{\mathrm{A}}\cap\overline{\mathrm{B}}\right) = p(\overline{\mathrm{A}}) \times p_{\overline{\mathrm{A}}}\left(\overline{\mathrm{B}}\right) = 0,6\times 0,1 = 0,06$$

De plus :

$$p\left(\overline{\mathrm{A}}\cap\overline{\mathrm{B}}\right) = p\left(\overline{\mathrm{A}\cup\mathrm{B}}\right) = 1 - p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}) = 1 - p(\mathrm{A}) - p(\mathrm{B}) + p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) \Longleftrightarrow p(\mathrm{B}) = 1 - p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) - p\left(\overline{\mathrm{A}}\cap\overline{\mathrm{B}}\right) = 0,82$$

Ainsi :

$$p_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) = \frac{0,28}{0,82} = \frac{14}{41}$$

Exercice 2 5 points

Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans le plan complexe $(\mathscr{P})$ muni d'un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$ d'unité graphique 4 cm, on considère le point A d'affixe $a = -1$ et l'application f, du plan $(\mathscr{P})$ dans lui·même, qui au point M d'affixe z, distinct de A, associe le point $\mathrm{M}' = f(\mathrm{M})$ d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{\mathrm{i}z}{z+1}.$$

1. Affixe des points M tels que $\mathrm{M}' = \mathrm{M}$:

$$z' = z \Longleftrightarrow z = \frac{\mathrm{i}z}{z+1} \Longleftrightarrow z(z+1) = \mathrm{i}z \Longleftrightarrow z^2 + z(1-\mathrm{i}) \Longleftrightarrow z\left(z - (-1+\mathrm{i})\right) \Longleftrightarrow z = 0 \text{ ou } z = -1+\mathrm{i}$$

Les points d'affixes 0 et $-1+\mathrm{i}$ vérifient $\mathrm{M}' = \mathrm{M}$?

2. Pour tout point M distinct de A et de O, on a :

$$\mathrm{OM}' = \left|\frac{\mathrm{i}z}{z+1}\right| = \frac{|\mathrm{i}z|}{|z+1|} = \frac{|\mathrm{i}|\,.\,|z|}{|z+1|} = \frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{AM}}$$

$$\begin{aligned}\left(\vec{u},\, \overrightarrow{\mathrm{OM}'}\right) &= \mathrm{Arg}\left(\frac{\mathrm{i}z}{z+1}\right) = \mathrm{Arg}(\mathrm{i}z) - \mathrm{Arg}(z+1) \qquad [2\pi]\\ &= \mathrm{Arg}(\mathrm{i}) + \mathrm{Arg}(z) - \mathrm{Arg}(z+1) \qquad [2\pi]\\ &= \frac{\pi}{2} + \left(\vec{u},\, \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right) - \left(\vec{u},\, \overrightarrow{\mathrm{AM}}\right) = \frac{\pi}{2} + \left(\vec{u},\, \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right) + \left(\overrightarrow{\mathrm{AM}},\, \vec{u}\right) \qquad [2\pi]\\ &= \frac{\pi}{2} + \left(\overrightarrow{\mathrm{AM}},\, \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right) = \frac{\pi}{2} + \left(\overrightarrow{\mathrm{MA}},\, \overrightarrow{\mathrm{MO}}\right) \qquad [2\pi]\end{aligned}$$

3. (a) Soit B le point d'affixe $b = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}$. (Voir figure en fin d'exercice)

(b) Calcul de l'affixe b' du point B' image du point B par f :

$$b' = \frac{\mathrm{i}\left(-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\right)}{-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}+1} = \frac{-1-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}}{\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}} = \frac{-2-\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}} = \frac{(-2-\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}{1^2+2^2} = \frac{-4}{5} + \frac{3}{5}\mathrm{i}$$

B' appartient au cercle $(\mathscr{C})$ de centre O et de rayon 1, car :

$$\left|\frac{-4}{5} + \frac{3}{5}\mathrm{i}\right| = \sqrt{\left(\frac{-4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{16+9}{25}} = 1 \Longleftrightarrow \mathrm{OM} = 1 \Longleftrightarrow \mathrm{M} \in \mathscr{C}$$

(c) Si M est sur la médiatrice (Δ), on a $\text{OM} = \text{AM} \iff 1 = \dfrac{\text{OM}}{\text{AM}} = \text{OM}'$. Ainsi M' est sur le cercle $(\mathscr{C})$ de centre O et de rayon 1.

(d) Soit C le point tel que le triangle AOC soit équilatéral direct.

Le point C' est sur le cercle $(\mathscr{C})$. On a $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\text{OC}'}\right) = \frac{\pi}{2} + \left(\overrightarrow{\text{CA}}, \overrightarrow{\text{CO}}\right) \quad [2\pi]$.

On trace le point C_1 vérifiant $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\text{OC}_1}\right) = \left(\overrightarrow{\text{CA}}, \overrightarrow{\text{CO}}\right) = \dfrac{\pi}{3} \quad [2\pi]$, à l'intersection du cercle $(\mathscr{C})$ et du cercle de centre I et de rayon 1. On trace la perpendiculaire à (OC_1) en O. Elle coupe le cercle $(\mathscr{C})$ en C'.

4. Dans cette question, on se propose de déterminer, par deux méthodes différentes, l'ensemble (Γ) des points M distincts de A et de O dont l'image M' par f appartient à l'axe des abscisses.

(a) On pose $z = x + \text{i}y$ avec x et y réels tels que $(x,\ y) \neq (-1,\ 0)$ et $(x,\ y) \neq (0,\ 0)$.

$$z' = \frac{\text{i}(x+\text{i}y)}{x+\text{i}y+1} = \frac{-y+\text{i}x}{(x+1)+\text{i}y} = \frac{(-y+\text{i}x)(x+1-\text{i}y)}{(x+1)^2+y^2} = \frac{-y+\text{i}(x^2+y^2+x)}{(x+1)^2+y^2};\ \text{d'où } \operatorname{Im}\left(z'\right) = \frac{x^2+y^2+x}{(x+1)^2+y^2}$$

M' appartient à l'axe des abscisses si et seulement si sa partie imaginaire est nulle, donc si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2+x=0 \\ (x;y) \neq (-1;0) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 + (y-0)^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \\ (x\ ;\ y) \neq (-1\ ;\ 0) \end{array}\right.$$

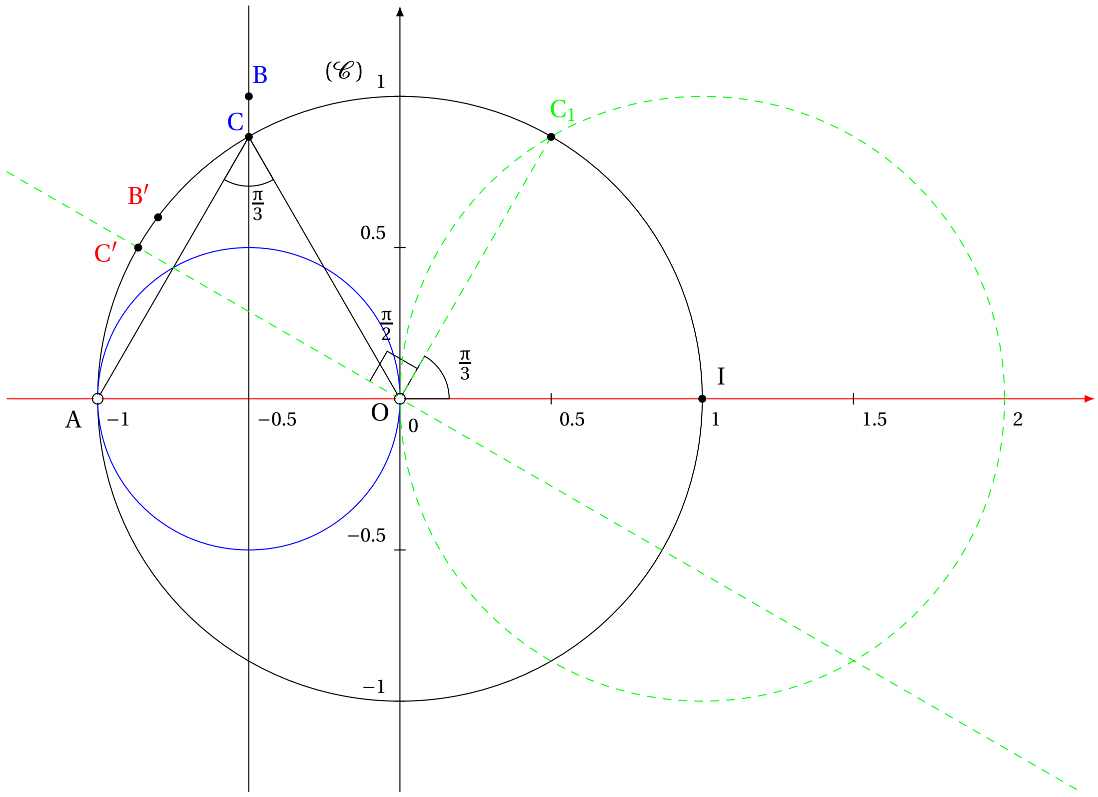
Ainsi (Γ) est le cercle de centre $\left(-\dfrac{1}{2}; 0\right)$ et de rayon $\dfrac{1}{2}$, privé du point $\text{A}(-1\ ;\ 0)$.

(b) Géométriquement $(\text{k} \in \mathbb{Z})$:

$$\text{M}' \in (xx') \text{ avec } \text{M} \neq \text{A et M} \neq \text{O} \iff \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\text{OM}'}\right) = \text{k}\pi$$

Ainsi :

$$\left\{\begin{array}{c} \dfrac{\pi}{2} + \left(\overrightarrow{\text{MA}}, \overrightarrow{\text{MO}}\right) = 0 + 2\text{k}\pi \\ \text{ou} \\ \dfrac{\pi}{2} + \left(\overrightarrow{\text{MA}}, \overrightarrow{\text{MO}}\right) = \pi + 2\text{k}\pi \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} \left(\overrightarrow{\text{MA}}, \overrightarrow{\text{MO}}\right) = -\dfrac{\pi}{2} + 2\text{k}\pi \\ \text{ou} \\ \left(\overrightarrow{\text{MA}}, \overrightarrow{\text{MO}}\right) = \dfrac{\pi}{2} + 2\text{k}\pi \end{array}\right. \iff \left(\overrightarrow{\text{MA}}, \overrightarrow{\text{MO}}\right) = \frac{\pi}{2} + \text{k}\pi \iff \text{M} \in \mathscr{C}_{\text{diamètre [AO]}} - \{\text{O};\text{A}\}$$

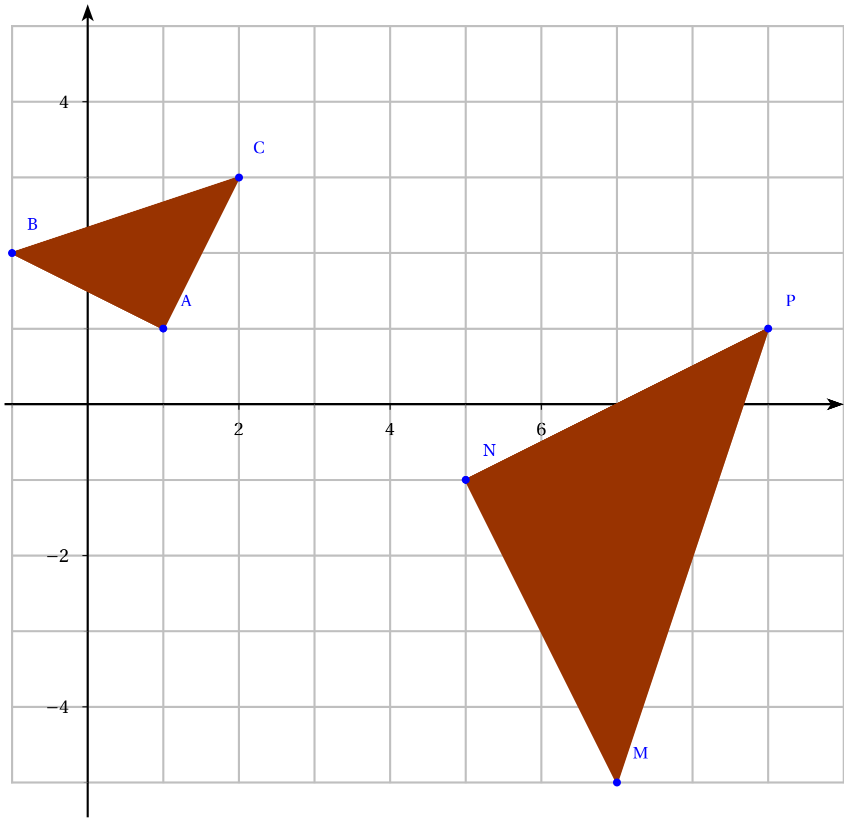


Exercice 2 — 5 points

Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$ d'unité graphique 1 cm, on considère les points A, B, C, M, N et P d'affixes respectives :

$$a = 1+\mathrm{i},\ b = -1+2\mathrm{i},\ c = 2+3\mathrm{i},\ m = 7-5\mathrm{i},\ n = 5-\mathrm{i},\ p = 9+\mathrm{i}.$$



1. (a)

   (b) On calcule les longueurs des côtés $\mathrm{AB} = |\,b-a\,| = |\,2+\mathrm{i}\,| = \sqrt{5}$; $\mathrm{AC} = |\,1+2\mathrm{i}\,| = \sqrt{5}$; $\mathrm{BC} = |\,3+\mathrm{i}\,| = \sqrt{10}$ donc AB = AC, le triangle ABC est isocèle en A et $\mathrm{BC}^2 = 10$; $\mathrm{BA}^2 + \mathrm{AC}^2 = 5+5 = 10$, donc $\mathrm{BC}^2 = \mathrm{BA}^2 + \mathrm{AC}^2$ le triangle ABC est isocèle rectangle en A.
   $\mathrm{NP} = |\,p-n\,| = |\,4+2\mathrm{i}\,| = \sqrt{20}$; $\mathrm{NM} = |\,2-4\mathrm{i}\,| = \sqrt{20}$; $\mathrm{MP} = |\,2+6\mathrm{i}\,| = \sqrt{40}$ donc NP = NM, le triangle NPM est isocèle en N et $\mathrm{MP}^2 = 40$; $\mathrm{MN}^2 + \mathrm{NP}^2 = 20+20 = 40$, donc $\mathrm{MP}^2 = \mathrm{MN}^2 + \mathrm{NP}^2$ le triangle MNP est isocèle rectangle en N.

   (c) Deux triangles isocèles rectangles ont leur côtés proportionnels (ici il faut multiplier par 2, pour passer des dimensions de ABC aux dimensions de MNP), donc ces deux triangles sont semblables.

2. Soit s la similitude directe qui transforme le point A en N et le point B en P.

   (a) On cherche $a$et b complexes, tels que la forme complexe de s soit $z' = az+b$ avec $a \neq 0$ et s est telle que elle transforme le point A en N et le point B en P. Donc

   $\mathrm{S} : \begin{cases} az_{\mathrm{A}} & + & b & = z_{\mathrm{N}} \\ az_{\mathrm{B}} & + & b & = z_{\mathrm{P}} \end{cases}$;donc ce système aux inconnues a, b admet une unique

   $\mathrm{S} : \begin{cases} a(1+\mathrm{i}) & + & b & = 5-\mathrm{i} \\ a(-1+2\mathrm{i}) & + & b & = 9+\mathrm{i} \end{cases}$

   $\mathrm{S} : \begin{cases} & & b & = 5-\mathrm{i}-a(1+\mathrm{i}) \\ a(-1+2\mathrm{i}) & + & 5-\mathrm{i}-a(1+\mathrm{i}) & = 9+\mathrm{i} \end{cases}$

   La dernière ligne ne comporte que l'inconnue a , on la résout :

   $a(-2+\mathrm{i}) = 4+2\mathrm{i}$ donc $a = \dfrac{4+2\mathrm{i}}{-2+\mathrm{i}}$ donc $a = \dfrac{(4+2\mathrm{i})(-2-\mathrm{i})}{(-2+\mathrm{i})(-2-\mathrm{i})}$

   $a = \dfrac{1}{5}((-8+2)+\mathrm{i}(-4-4))$

$a = \left(-\frac{6}{5} - \frac{8}{5}\mathrm{i}\right)$ on trouve b ; $b = 5 - \mathrm{i} - a(1+\mathrm{i}) = 5 - \mathrm{i} + \left(-\frac{6}{5} - \frac{8}{5}\mathrm{i}\right)(1+\mathrm{i})$; donc $b = \left(5 + \frac{6}{5} - \frac{8}{5}\right) + \mathrm{i}\left(-1 + \frac{6}{5} + \frac{8}{5}\right) = \frac{23}{5} + \frac{9}{5}\mathrm{i}$.

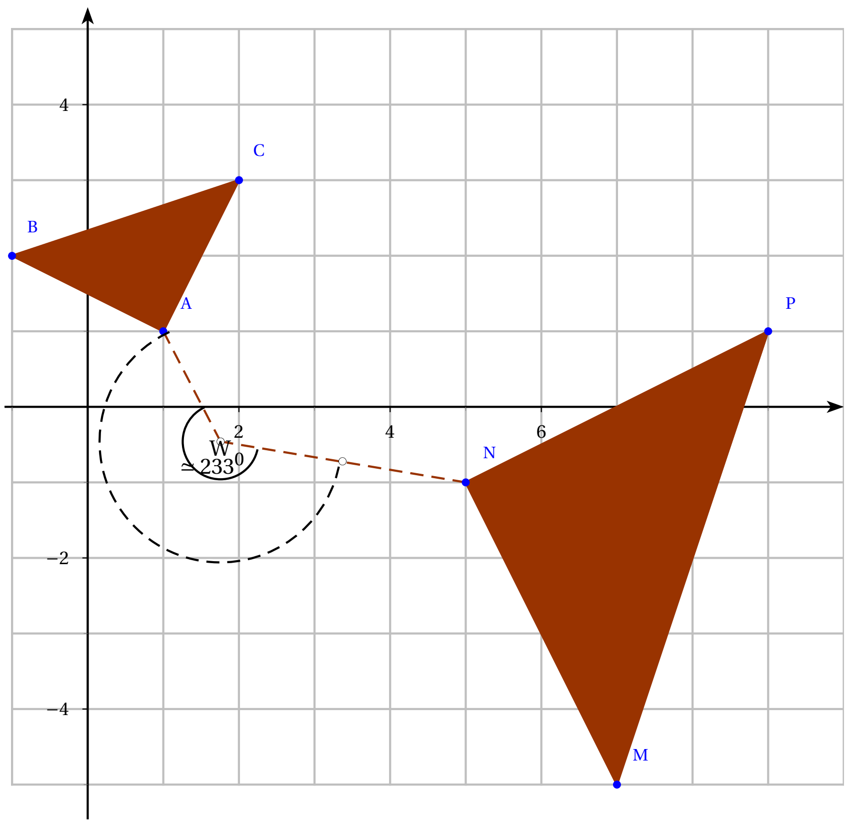
L'écriture complexe de la similitude s est :

$$z' = \left(-\frac{6}{5} - \frac{8}{5}\mathrm{i}\right)z + \frac{23}{5} + \frac{9}{5}\mathrm{i}.$$

(b) Le rapport, c'est $|\ a\ | = \sqrt{\left(-\frac{6}{5}\right)^2 + \left(-\frac{6}{5}\right)^2} = 2$. L'angle c'est $\theta = \arg(a)$ avec $\cos(\theta) = \frac{\frac{-6}{5}}{2} = \frac{-3}{5}$ et $\sin(\theta) = \frac{\frac{-8}{5}}{2} = \frac{-4}{5}$ c'est un angle du 4eme quadrant c'est 233 au degrés environ.

Le centre de la similitude s, c'est le point fixe W de s , on résout $z' = z$.

$$\begin{aligned}
z' = z &\iff z = \left(-\frac{6}{5} - \frac{8}{5}\mathrm{i}\right)z + \frac{23}{5} + \frac{9}{5}\mathrm{i}\\
z' = z &\iff 5z = (-6-8\mathrm{i})z + 23 + 9\mathrm{i}\\
z' = z &\iff (11+8\mathrm{i})z = 23 + 9\mathrm{i}\\
z' = z &\iff z = \frac{23+9\mathrm{i}}{(11+8\mathrm{i})}\\
z' = z &\iff z = \frac{(23+9\mathrm{i})(11-8\mathrm{i})}{(11+8\mathrm{i})(11-8\mathrm{i})}\\
z' = z &\iff z = \frac{253+72+(99-184)\mathrm{i}}{185}\\
z' = z &\iff z = \frac{325+(-85)\mathrm{i}}{185}\\
z' = z &\iff z = \frac{65+(-17)\mathrm{i}}{37}
\end{aligned}$$



(c) Calculons l'affixe de s(C) :

c'est $z' = (-\frac{6}{5} - \frac{8}{5}\mathrm{i})(2+3\mathrm{i}) + \frac{23}{5} + \frac{9}{5}\mathrm{i}$

$z' = \frac{1}{5}[(-12+24+23) + (-18-16+9)\mathrm{i}]$

$z' = \frac{1}{5}[(35) + (-25)\mathrm{i}]$
$z' = 7 - 5\mathrm{i}$
donc $s(\mathrm{C}) = \mathrm{M}$.

3. Soit s' la similitude dont l'écriture complexe est :

$$z' = 2\mathrm{i}\overline{z} + 3 - 3\mathrm{i}.$$

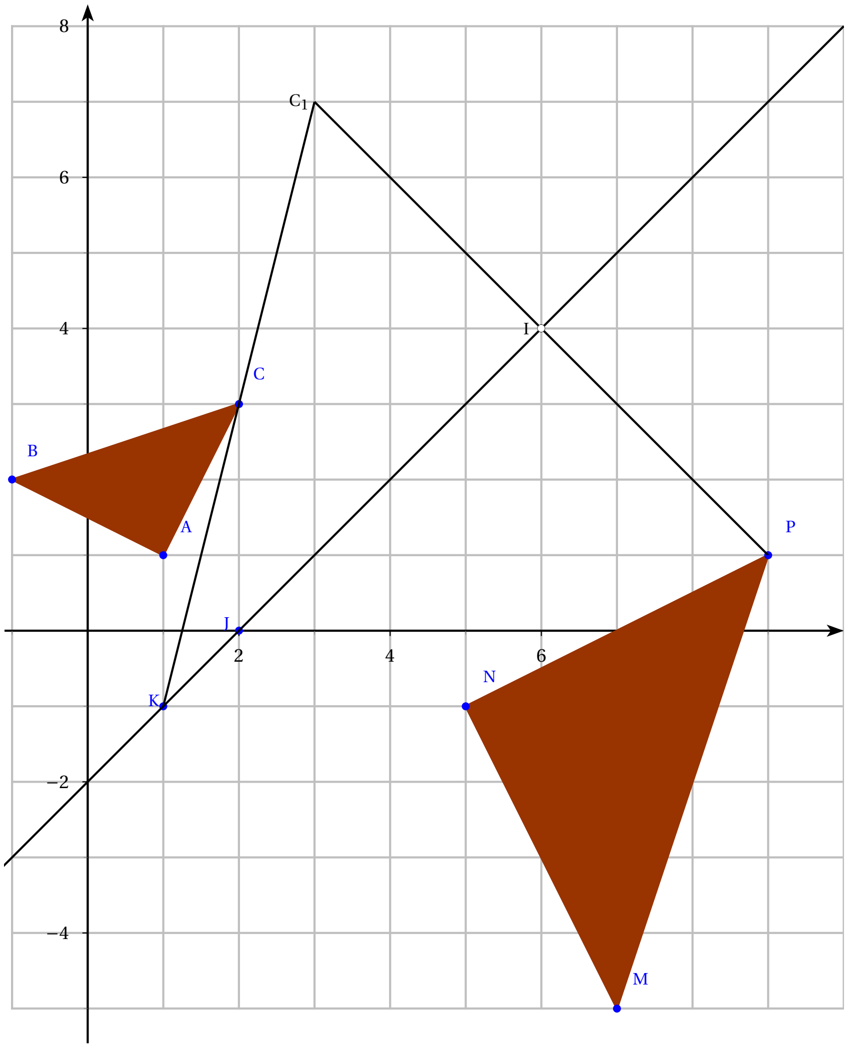
   (a) On calcule z' avec $z = (1+\mathrm{i})$
   $z' = 2\mathrm{i}(1 - \mathrm{i} + 3 - 3\mathrm{i} = 5 - \mathrm{i} = n$
   On calcule z' avec $z = (-1+2\mathrm{i})$
   $z' = 2\mathrm{i}(-1 - 2\mathrm{i} + 3 - 3\mathrm{i} = 7 - 5\mathrm{i} = m$
   On calcule z' avec $z = (2+3\mathrm{i})$
   $z' = 2\mathrm{i}(2 - 3\mathrm{i}) + 3 - 3\mathrm{i} = 9 + \mathrm{i} = p$

   (b) On résout $z' = z$ avec s'.
   On a $z = 2\mathrm{i}\overline{z} + 3 - 3\mathrm{i}$ donc en conjuguant :
   $\overline{z} = -2\mathrm{i}z + 3 + 3\mathrm{i}$
   donc en revenant à la première équation
   $z = 2\mathrm{i} \times (-2\mathrm{i}z + 3 + 3\mathrm{i}) + 3 - 3\mathrm{i}$,
   on a alors une équation du premier degré en z donc
   $z = 4z + 6\mathrm{i} - 6 + 3 - 3\mathrm{i}$
   $-3z = -3 + 3\mathrm{i}$
   donc $z = 1 - \mathrm{i}$
   Comme la méthode a été compliquée , on vérifie :
   $2\mathrm{i}(\overline{1 - \mathrm{i}}) + 3 - 3\mathrm{i} = 2\mathrm{i}(1+\mathrm{i}) + 3 - 3\mathrm{i} =$
   $= 2\mathrm{i} - 2 + 3 - 3\mathrm{i} = 1 - \mathrm{i}$

   Le point fixe de s' est le point K d'affixe $1 - \mathrm{i}$

   (c) Soit h l'homothétie de centre K et de rapport $\frac{1}{2}$ et J le point d'affixe 2.
   On pose : $f = s' \circ h$. Comme $h(\mathrm{K}) = \mathrm{K}$ et $s(\mathrm{K}) = \mathrm{K}$, alors $s' \circ h(\mathrm{K}) = \mathrm{K}$. Pour J, par h J est transformé en J' point d'affixe $z_{\mathrm{J}'}$ et comme $\vec{\mathrm{KJ}'} = \frac{1}{2}\vec{\mathrm{KJ}}$ on peut dire que J' est le milieu de [KJ] donc $\frac{2 + (1 - \mathrm{i})}{2} = z_{\mathrm{J}'}$ donc $z_{\mathrm{J}'} = \frac{1}{2}(3 - \mathrm{i})$.
   Calculons ensuite l'affixe de $s'(\mathrm{J}')$ c'est
   $2\mathrm{i}\overline{\frac{1}{2}(3 - \mathrm{i})} + 3 - 3\mathrm{i} = \mathrm{i}(3 + \mathrm{i}) + +3 - 3\mathrm{i} = 2$ on trouve bien que K et J sont invariants par f.
   F est une composée de similitudes l'une directe, l'autre indirecte, donc f est une similitude indirecte, qui conserve deux points ,donc c'est la symétrie axiale par rapport à la droite portant ces deux points donc par rapport à la droite (KJ).

   (d) On a établi que $s' \circ h = s_{(\mathrm{KJ})}$ donc $s' \circ h \circ h^{-1} = s_{(\mathrm{KJ})} \circ h^{-1}$ donc s' est la composée d'une homthétie et d'une symétrie axiale car h^{-1} est l'homothétie de centre K et de rapport 2.
   $s' = s_{(\mathrm{KJ})} \circ h_{\mathrm{K};2}$



Exercice 3 — 6 points

Commun à tous les candidats

On considère les deux courbes $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ d'équations respectives $y = \mathrm{e}^x$ et $y = -x^2 - 1$ dans un repère orthogonal du plan.

1. Lecture graphique de l'abscisse du point de contact de cette tangente avec la courbe $(\mathscr{C}_1)$: $a \simeq 0,8$ et l'abscisse du point de contact de cette tangente avec la courbe $(\mathscr{C}_2)$: $b \simeq -1,2$.
2. On désigne par a et b deux réels quelconques, par A le point d'abscisse a de la courbe $(\mathscr{C}_1)$ et par B le point d'abscisse b de la courbe $(\mathscr{C}_2)$.
   On a alors : $\mathrm{A}\left(a ; \mathrm{e}^a\right)$ et $\mathrm{B}\left(b ; -b^2 - 1\right)$.
   (a) Équation de la tangente $(\mathscr{T}_{\mathrm{A}})$ à la courbe $(\mathscr{C}_1)$ au point A :
   $$y - \mathrm{e}^a = \mathrm{e}^a(x - a) \iff y = \mathrm{e}^a x + \mathrm{e}^a(1 - a)$$
   (b) Équation de la tangente $(\mathscr{T}_{\mathrm{B}})$ à la courbe $(\mathscr{C}_2)$ au point B :
   $$y - (-b^2 - 1) = -2b(x - b) \iff y = (-2b)x + b^2 - 1$$
   (c) $(\mathscr{T}_{\mathrm{A}}) = (\mathscr{T}_{\mathrm{B}})$. En identifiant terme à terme les deux équations, on obtient :
   $$(\mathscr{T}_{\mathrm{A}}) = (\mathscr{T}_{\mathrm{B}}) \iff (\mathrm{S}) : \left\{\begin{array}{l} \mathrm{e}^a = -2b \\ \mathrm{e}^a(1 - a) = b^2 - 1 \end{array}\right.$$

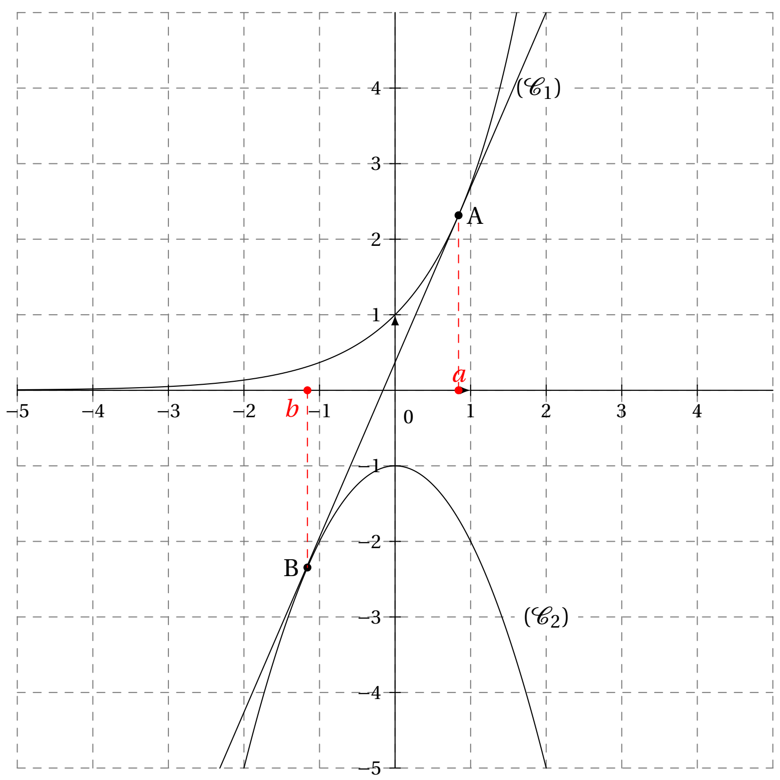
(d) Montrer que le système (S) est équivalent au système (S′) :

$$(S) \iff \begin{cases} b = -\frac{e^a}{2} \\ e^a(1-a) = \left(-\frac{e^a}{2}\right)^2 - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} b = -\frac{e^a}{2} \\ 4e^a(1-a) = (e^a)^2 - 4 \end{cases} \iff \begin{cases} e^a & = & -2b \\ e^{2a} + 4ae^a - 4e^a - 4 & = & 0 \end{cases}$$

3. (E) : $e^{2x} + 4xe^x - 4e^x - 4 = 0$.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{2x} + 4xe^x - 4e^x - 4$.
   (a) Sur $]-\infty\,;\,0[$, la fonction $x \to e^{2x}$ est croissante et strictement positive, donc :
   $$\left(e^{2x} \leqslant e^{2\times 0} = 1 < 4 \Longrightarrow e^{2x} - 4 < 0\right) \text{ et } \left(x \in]-\infty\,;\,0[\iff x < 0 \iff x - 1 < -1 < 0 \Longrightarrow 4e^x(x-1) < 0\right)$$
   (b) L'équation (E) n'a pas de solution dans l'intervalle $]-\infty\,;\,0[$, car sur cet intervalle, $e^{2x} + 4xe^x - 4e^x - 4 < 0$.
   (c) La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, car sa dérivée est positive :
   $$f'(x) = 2e^{2x} + 4e^x + 4xe^x - 4e^x = 2e^{2x} + 4xe^x > 0 \text{ (somme de nombres strictement positifs)}$$
   (d) Démontrer que l'équation (E) admet une solution unique dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$. En effet :
   $$f(0) = -7 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{2x}\left(1 + 4\frac{x}{e^x} - \frac{4}{e^x} - \frac{4}{e^{2x}}\right) = +\infty \text{ car } \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{4}{e^{nx}} = 0 \ (n = 1 \text{ ou } 2)$$
   La fonction f est continue et strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$; elle réalise donc une bijection de $[0\,;\,+\infty[$ sur $[-3\,;\,+\infty[$.
   Or $0 \in [-3\,;\,+\infty[$, donc 0 possède un unique antécédent, noté a vérifiant $f(a) = 0$.
   Encadrement d'amplitude 10^{-2} de a (en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires) :
   $$f(0{,}84) \simeq -0{,}117 \text{ et } f(0{,}85) \simeq 0{,}07 \Longrightarrow 0{,}84 \leqslant a \leqslant 0{,}85$$

4. On prend pour A le point d'abscisse a. Encadrement d'amplitude 10^{-1} du réel b pour lequel les droites $(\mathcal{T}_A)$ et $(\mathcal{T}_B)$ sont confondues :
$$0{,}84 \leqslant a \leqslant 0{,}85 \iff 2{,}31 < e^{0{,}84} \leqslant e^a \leqslant e^{0{,}85} < 2{,}34 \iff 1{,}155 \leqslant \frac{e^x}{2} \leqslant 1{,}17 \iff -1{,}2 \leqslant b = -\frac{e^x}{2} \leqslant -1{,}1$$

Annexe 1 (Exercice 3, question 1)



Exercice 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = 6 - \frac{5}{x+1}.$$

Le but de cet exercice est d'étudier des suites (u_n) définies par un premier terme positif ou nul u_0 et vérifiant pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Étude de propriétés de la fonction f
   (a) Sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$:

   $$f'(x) = \frac{5}{(x+1)^2} > 0; \quad \text{la fonction } f \text{ est donc strictement croissante sur } [0\ ;\ +\infty[$$

   (b) Résolution dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ de l'équation $f(x) = x$:

   $$f(x) = x \Longleftrightarrow 6 - \frac{5}{x+1} = x \Longleftrightarrow \frac{6x+6-5}{x+1} = x \Longleftrightarrow 6x+1 = x^2 + x \Longleftrightarrow x^2 - 5x - 1 = 0$$

   $$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 29; \quad \text{donc} \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{5+\sqrt{29}}{2} \simeq 5,193 \in [0\ ;\ +\infty[\\ \beta = \frac{5-\sqrt{29}}{2} \simeq -0,193 \notin [0\ ;\ +\infty[\end{array} \right.$$

   (c) La fonction f étant croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$:

   $$0 \leqslant x \leqslant \alpha \Longleftrightarrow 0 < 1 = f(0) \leqslant f(x) \leqslant \alpha = f(\alpha)$$

   De même :

   $$x \geqslant \alpha \Longleftrightarrow f(x) \geqslant \alpha = f(\alpha)$$

2. Étude de la suite (u_n) pour $u_0 = 0$.
   Dans cette question, on considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :

   $$u_{n+1} = f(u_n) = 6 - \frac{5}{u_n + 1}.$$

   (a) Voir annexe 2.
   Conjectures peut-on émettre quant au sens de variations et à la convergence de la suite (u_n) : la suite (u_n) est croissante et converge vers α.

   (b) Pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$
   récurrence : $\forall n,\ n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$:
   - $u_0 = 0$ et $u_1 = 1 \Longrightarrow 0 \leqslant u_0 = 0 \leqslant u_1 = 1 \leqslant \alpha \simeq 5,193$
   - Supposons que pour un n donné, on ait : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$. La fonction f étant croissante sur $[0; \alpha]$:

   $$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha \Longleftrightarrow 0 < 1 = f(0) \leqslant u_{n+1} = f(u_n) \leqslant u_{n+2} = f(u_{n+1}) \leqslant \alpha = f(\alpha)$$

   - Ainsi, $\forall n,\ n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$.

   (c) La suite (u_n) étant croissante et majorée par α, elle est convergente vers ℓ.
   La fonction f étant continue sur $[0; \alpha]$, ℓ vérifie :

   $$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell \Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} f(u_n) = u_{n+1} = f(\ell) \Longrightarrow f(\ell) = \ell$$

   Nous savons que seul α vérifie $f(x) = x$ sur $[0; +\infty[$. Ainsi :

   $$\lim_{n \to +\infty} u_n = \alpha$$

3. Étude des suites (u_n) selon les valeurs du réel positif ou nul u_0
   - Si $u_0 \in [o; \alpha[$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et converge vers α.
   - Si $u_0 = \alpha$, la suite est constante et égale à α.
   - Si $u_0 \in]\alpha; +\infty[$, la suite est décroissante et converge vers α.

   Les démonstrations se font de la même manière que pour $u_0 = 0$.

FEUILLE ANNEXE (à rendre avec la copie)

Annexe 2 (Exercice 4, question 2. a.)